

## 経済学部 数学

### 【注意】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 試験時間は13時30分から15時10分まで(100分間)です。
3. この問題冊子は表紙以外に2ページあり、解答用紙は4枚、下書き用紙は1枚あります。
4. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
5. 解答はすべて解答用紙の解答欄に記入してください。
6. 解答用紙の氏名欄を除き、受験者本人の特定につながるような氏名、住所、学校名等は記述しないでください。
7. 解答用紙を持ち出してはいけません。持ち出した場合、試験をすべて無効とします。
8. 試験終了後、問題冊子および下書き用紙は持ち帰ってください。

問題1 (配点 50 点)

数列  $\{a_n\}$  は公差が正の数である等差数列で、初項と第2項の和は0、積は  $-1$  であるとする。また、数列  $\{b_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  と定める。数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$  と  $\{S_n\}$  は次の式を満たすとする。

$$a_n + 3b_n - 2S_n - 3 = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

さらに、 $T_n = \sum_{k=1}^n a_k(b_k - 1)$  とする。以下の問題に答えよ。

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。
- (2)  $b_{n+1}$  を  $b_n$  を用いて表せ。
- (3) 数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。
- (4)  $T_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (5)  $T_n > 1000$  となる最小の  $n$  を求めよ。

問題2 (配点 50 点)

関数  $f(x) = x^2 + (a-1)x + 1$  と  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - b$  を考える。以下の問題に答えよ。

- (1)  $y = f(x)$  のグラフが  $x$  軸と異なる2点で交わるような定数  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $a = 0, b = 0$  のとき、 $k > 0$  かつ  $\log_3 \frac{g(k)}{\sqrt{k}} = \frac{13}{2}$  を満たす  $k$  の値を求めよ。また、その  $k$  の値のもとで  $\int_0^{\frac{k}{9}-1} f(x)dx$  を求めよ。
- (3)  $a = 1$  のとき、 $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  のグラフが異なる3つの交点を持つような定数  $b$  の値の範囲を求めよ。
- (4)  $a = 0, b = 0$  のときを考える。 $y = g(x)$  の接線と  $y = f(x)$  が異なる2点で交わるとする。それら2点の中点の  $x$  座標が5であるとき、接線の方程式を求めよ。

**問題3** (配点 50 点)

四角形 ABCD は円に内接し,  $AD = \sqrt{3} - 1$ ,  $BD = \sqrt{6}$ ,  $\angle ADB = 45^\circ$ ,  $\angle BDC = 30^\circ$  であるとする. また, BD 上に  $\angle ACB = \angle DCE$  となる点 E をとる. 以下の問題に答えよ.

- (1) AB の長さを求めよ.
- (2) 四角形 ABCD の外接円の半径  $R$  を求めよ.
- (3) AC の長さを求めよ.
- (4) 三角形 ACB と三角形 DCE が相似であることを示せ.
- (5)  $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$  であることを示せ.

**問題4** (配点 50 点)

0 から 9 の数字が書かれた 10 枚のカードから無作為に 1 枚を引き, 出た数字を  $x$  とする. また, この  $x$  に対して

$$\sqrt{x} + 2xy + y = 2$$

が成り立つように  $y$  を定める. 以下の問題に答えよ.

- (1)  $y = 2$  となる確率を求めよ.
- (2)  $y > 0$  となる確率を求めよ.
- (3)  $y$  が無理数となる確率を求めよ.
- (4)  $(y + 2)(5y + \sqrt{2} - 2)(13y + \sqrt{6} - 2) = 0$  となる確率を求めよ.
- (5)  $y$  が無理数であるとき,  $x$  が 3 の倍数である確率を求めよ.