「解答例」

選抜区分	2021 年度　（選抜区分：一般選抜） 経済学部　（科目名：数学）

問題 1

(1) $a_2 = \frac{10^3}{a_1^2} = \frac{10^3}{(10^{-1})^2} = 10^5$, $a_3 = \frac{10^6}{a_2^2} = \frac{10^6}{(10^5)^2} = \frac{1}{10^4}$. また, $b_1 = \log_{10} a_1 = \log_{10} \frac{1}{10} = -1$, $b_2 = \log_{10} a_2 = \log_{10} 10^5 = 5$, $b_3 = \log_{10} a_3 = \log_{10} \frac{1}{10^4} = -4$.
したがって, $a_2 = 10^5$, $a_3 = \frac{1}{10^4}$, $b_1 = -1$, $b_2 = 5$, $b_3 = -4$. $\cdots$（答）

(2) $a_{n+1} = \frac{10^{3n}}{a_n^2}$ の対数をとると $\log_{10} a_{n+1} = -2\log_{10} a_n + 3n$ を得る.
したがって, $b_{n+1} = -2b_n + 3n$ $\cdots$（答）

(3) (2) より

$$\begin{cases} b_{n+2} = -2b_{n+1} + 3(n+1) & \cdots(a) \\ b_{n+1} = -2b_n + 3n & \cdots(b) \end{cases}$$

式を辺々引き $(a) - (b)$ を考えて,

$$b_{n+2} - b_{n+1} = -2(b_{n+1} - b_n) + 3$$

$c_n = b_{n+1} - b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ なので,

$$c_{n+1} = -2c_n + 3 \quad \cdots(c)$$

を得る. また, (1) より $b_1 = -1$, $b_2 = 5$ だから, $c_1 = b_2 - b_1 = 6$ である. (c) を変形して,

$$c_{n+1} - 1 = -2(c_n - 1)$$

数列 $\{c_n - 1\}$ は初項 $c_1 - 1 = 6 - 1 = 5$ 公比 -2 の等比数列であるから

$$c_n - 1 = 5 \times (-2)^{n-1}$$

したがって, 数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n = 5 \times (-2)^{n-1} + 1$ である. $\cdots$（答）

(4) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列は $\{c_n\}$ であるから, $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(5 \times (-2)^{k-1} + 1\right) \\ &= -1 + 5 \times \frac{1 - (-2)^{n-1}}{1 - (-2)} + (n-1) \\ &= -\frac{5}{3} \times (-2)^{n-1} + n - \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{6} \times (-2)^n + n - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

また, $n = 1$ のとき (1) より $b_1 = -1 = \frac{5}{6} \times (-2) + 1 - \frac{1}{3}$ でこの式を満たす.
よって, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \frac{5}{6} \times (-2)^n + n - \frac{1}{3}$ である. $\cdots$（答）

(5) 題意より $P_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$ であるから,

$$\begin{aligned}\log_{10} P_n &= \sum_{k=1}^{n}\log_{10} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\times(-2)^k + k - \frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{5}{3}\times\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} + \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{n}{3} \\ &= \frac{5}{9}\times(-2)^n + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - \frac{5}{9}\end{aligned}$$

したがって, $\log_{10} P_n = \frac{5}{9}\times(-2)^n + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - \frac{5}{9}$ $\cdots$（答）

問題２

(1) $f(x) = 0$, つまり

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

の解は $x = -1, 3$ である．条件より $a = -1, b = 3$ である．$\cdots$（答）

(2) (1) より, t は $-1 < t < 3$ を満たすので,

$$f(t) = -t^2 + 2t + 3$$

$f'(t) = -2t + 2$ より, 点 $\mathrm{T}(t, f(t))$ における曲線 C の接線 l の方程式は

$$y = (-2t+2)(x-t) - t^2 + 2t + 3$$

よって, $y = (-2t+2)x + t^2 + 3$ である．$\cdots$（答）

(3) 直線 l と曲線 C が２交点を $\mathrm{P}(p, f(p))$, $\mathrm{Q}(q, f(q))$ を持つとき $p < -1$, $3 < q$ となり, p, q は２次方程式

$$x^2 - 2x - 3 = (-2t+2)x + t^2 + 3$$

の解 $x = -t + 2 \pm \sqrt{2t^2 - 4t + 10}$ である． $p < q$ より $p = -t + 2 - \sqrt{2t^2 - 4t + 10}$, $q = -t + 2 + \sqrt{2t^2 - 4t + 10}$ である．$\cdots$（答）

(4) $t = 2$ のとき, 直線 l の式は (2) より $y = -2x + 7$ である．また, $p = -t + 2 - \sqrt{2t^2 - 4t + 10} = -\sqrt{10}$ なので

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_{-\sqrt{10}}^{-1}(-2x + 7 - (x^2 - 2x - 3))\,dx + \int_{-1}^{2}(-2x + 7 + (x^2 - 2x - 3))\,dx \\ &= \int_{-\sqrt{10}}^{-1}(-x^2 + 10)\,dx + \int_{-1}^{2}(x^2 - 4x + 4)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + 10x\right]_{-\sqrt{10}}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{-2 + 20\sqrt{10}}{3} \quad \cdots\text{（答）}\end{aligned}$$

(5) $f(x)$ と線分 AB で囲まれる部分の面積は

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3}(-x^2 + 2x + 3)\,dx = \frac{1}{6}\cdot(3 - (-1))^3 = \frac{32}{3}$$

なので (2)(3) より

$$\begin{aligned} S_1+S_2+\frac{32}{3}\times 2 &= \int_p^q ((-2t+2)x+t^2+3-(x^2-2x-3))\,dx \\ &= \frac{1}{6}\cdot(q-p)^3=\frac{1}{6}\cdot(2\sqrt{2t^2-4t+10})^3 \end{aligned}$$

したがって

$$S_1+S_2=\frac{4}{3}(\sqrt{2t^2-4t+10})^3-\frac{64}{3}$$

ここで, S_1+S_2 が最小 $\iff$ $2t^2-4t+10=2(t-1)^2+8$ が $-1<t<3$ 最小 $\iff$ $t=1$

よって, $t=1$ のとき最小値 $S_1+S_2=\dfrac{4}{3}\sqrt{8}^3-\dfrac{64}{3}=\dfrac{64}{3}(\sqrt{2}-1)$ $\cdots$（答）

問題３

(1) $0^\circ<\theta<90^\circ$ より A と C の距離は $\mathrm{AC}=\sqrt{(\cos 2\theta-1)^2+(\sin 2\theta)^2}$
$=\sqrt{\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta+1-2\cos 2\theta}=\sqrt{2-2\cos 2\theta}=\sqrt{4\sin^2\theta}=2\sin\theta$ $\cdots$（答）
(別解) $0^\circ<\theta<90^\circ$ と余弦定理より $\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AO}^2+\mathrm{OC}^2-2\cdot\mathrm{AO}\cdot\mathrm{OC}\cos 2\theta}$
$=\sqrt{1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 2\theta}=\sqrt{2-2\cos 2\theta}=\sqrt{4\sin^2\theta}=2\sin\theta$ $\cdots$（答）

(2) 三角形 AOC の重心 G 座標は

$$\left(\frac{\cos 2\theta+0+1}{3},\frac{\sin 2\theta+0+0}{3}\right)=\left(\frac{\cos 2\theta+1}{3},\frac{\sin 2\theta}{3}\right)\ \cdots\text{（答）}$$

(3) 三角形 AOC の重心の G 座標を (x,y) とおくと, (2) より

$$\begin{cases} x=\frac{\cos 2\theta+1}{3} \\ y=\frac{\sin 2\theta}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 2\theta=3x-1 \\ \sin 2\theta=3y \end{cases} \iff (3x-1)^2+(3y)^2=1 \iff \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

また, $0^\circ<\theta<90^\circ$ より求める軌跡は円弧 $(x-\frac{1}{3})^2+y^2=(\frac{1}{3})^2\ (y>0)$ $\cdots$（答）

(4) 三角形 AOC において正弦定理より, $0^\circ<\theta<90^\circ$ に注意して

$$R=\frac{\mathrm{AC}}{2\sin\angle\mathrm{AOC}}=\frac{2\sin\theta}{2\sin 2\theta}=\frac{\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{2\cos\theta}\ \cdots\text{（答）}$$

(5) 線分 OA の中点を M とする. 三角形 KOC は KO=KC= R の 2 等辺三角形だから, 三角形 KOM は $\angle$OMK= 90° の直角三角形である. (4) と $0^\circ<\theta<90^\circ$ より

$$\mathrm{KM}=\sqrt{\mathrm{KO}^2-\mathrm{OM}^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$ よって, K の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta}\right)$ $\cdots$（答）

(別解) 外心は各辺の垂直二等分線の交点である. 三角形 AOC は OA=OC の 2 等辺三角形だから, 辺 AC の垂直二等分線は原点を通る直線 $y=x\tan\theta$ である. また, 辺 OC の垂直二等分線は $x=\frac{1}{2}$ である. よって, 外心 K はこの 2 直線の交点で, K の座標は連立方程式

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=x\tan\theta \end{cases}$$

の解であり

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\tan\theta\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}\right)\ \cdots\text{（答）}$$

(6) 三角形 AOC は OA=OC の 2 等辺三角形だから AB//KO である． また, 三角形 ABO は OA=OB の 2 等辺三角形だから AC//OK' である．したがって, 三角形 OKK' は ∠KOK'= 90° の直角三角形であり, (4) より OK $= \frac{1}{2\cos\theta}$ であり, また (4) と同様に OK' $= \frac{1}{2\cos(90°-\theta)} = \frac{1}{2\sin\theta}$ であるから, 三角形 OKK' の面積は

$$S = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OK}\cdot \mathrm{OK'} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cos\theta}\cdot\frac{1}{2\sin\theta} = \frac{1}{4\sin 2\theta}\ \cdots\ (\text{答})$$

$0° < \theta < 90°$ より最小値は $\frac{1}{4}$ ($\theta = 45°$ のとき) $\cdots$（答）

(別解) (5) より K$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}\right)$. また (5) と同様にして K'$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)$ であるから, 三角形 OKK' の面積は

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{2\sin\theta} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}\right| = \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{4\sin 2\theta}\ \cdots\ (\text{答})$$

$0° < \theta < 90°$ より最小値は $\frac{1}{4}$ ($\theta = 45°$ のとき) $\cdots$（答）

問題４

(1) A さんが勝つ確率は

$$\frac{5\times 5-5}{5\times 5} = \frac{4}{5}\cdots(\text{答})$$

(2) A さんが 1, 2, 3 の 3 枚のカードを出す確率は

$$\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{10}\cdots(\text{答})$$

(3) 「A さんの 2 回目のカードの数字が B さんの 1 回目の数字と同じ場合」と「A さんの 2 回目のカードの数字が B さんの 1 回目の数字と異なる場合」に分かれるので, A さんが 2 回とも勝つ確率は

$$\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right) = \frac{13}{20}\cdots(\text{答})$$

(4) 「A さんの 2 回目のカードの数字が B さんの 1 回目の数字と同じ場合」と「A さんの 2 回目のカードの数字が B さんの 1 回目の数字と異なる場合」に分かれ, さらに, 「A さんの 3 回目のカードの数字が B さんの 1 回目の数字と同じ場合」と「A さんの 3 回目のカードの数字が B さんの 1 回目の数字と異なる場合」に分かれるので, 1 回目と 3 回目は A さんが勝ち 2 回目は B さんが勝つ確率は

$$\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{0}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{60}\cdots(\text{答})$$

(5) 「A さんが 1 回目に勝つ場合」と「A さんが 1 回目に負ける場合」に分かれるので, A さんが 2 回目に勝つ確率は

$$\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{5}\cdot\frac{4\times 4-4}{4\times 4} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

1 回目に出した A さんのカードの数字が 1 回目に出した B さんのカードの数字よりも大きく, さらに, A さんが 2 回目に勝つ確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5\times 5-5}{5\times 5}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\right) = \frac{13}{40}$$

A さんが 2 回目に勝っているとき, 1 回目に出した A さんのカードの数字が 1 回目に出した B さんのカードの数字よりも大きかった確率は

$$\frac{13}{40}\div\frac{4}{5} = \frac{13}{32}\cdots(\text{答})$$